关于 Smarandache 函数的两个方程

杨长恩

(咸阳师范学院数学与信息科学学院, 陕西 咸阳 712000)

摘要: 对于著名的伪 Smarandache 函数 $Z(n)$, Smarandache 互反函数 $Sc(n)$, 以及伪 Smarandache 对偶函数 $Z^*(n)$, 利用初等方法, 借助同余方程理论, 研究了包含函数 $Z(n)$, $Sc(n)$ 以及 $Z^*(n)$ 的两个方程解的问题, 并给出了一些有趣的结果.

关键词: 伪 Smarandache 函数; Smarandache 互反函数; 伪 Smarandache 对偶函数

中图分类号: O156.4 **文献标识码**: A **文章编号**: 1008-5513(2010)03-0387-04

1 引言及结论

对任意正整数 n, 著名的伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 定义为使得 n 整除 $\sum_{k=1}^{m} k$ 的最小的正整数 m, 即 $Z(n) = \min\left\{m : n \mid \frac{m(m+1)}{2}\right\}$. 例如, 该函数的前几个值为: $Z(1) = 1$, $Z(2) = 3$, $Z(3) = 2$, $Z(4) = 7$, $Z(5) = 5$, $Z(6) = 3$, $Z(7) = 6$, $Z(8) = 15$, $Z(9) = 9$, $Z(10) = 4$, $Z(11) = 10$, $Z(12) = 8$, $Z(13) = 12$, $Z(14) = 7$, $Z(15) = 5$, $Z(16) = 31$, $Z(17) = 16$, $Z(18) = 8$, $Z(19) = 18$, $Z(20) = 15, \cdots$.

关于这一函数, 许多学者研究了它的性质, 并得到了一些重要的结果, 见文献 [1-6]. 例如, 张文鹏教授在文献 [4] 中研究了方程 $Z(n) = S(n)$, $Z(n) + 1 = S(n)$ 的可解性, 并给出了方程的全部正整数解.

而在文献 [7] 中, 引进了 Smarandache 互反函数 $Sc(n)$, $Sc(n)$ 定义为满足 $y \mid n!$ 且 $1 \leq y \leq m$ 的最大正整数 m, 即 $Sc(n) = \max\{m : y \mid n!,\ 1 \leq y \leq m,\ m+1 \dagger n!\}$.

例如, $Sc(n)$ 的前几个值为: $Sc(1) = 1$, $Sc(2) = 2$, $Sc(3) = 3$, $Sc(4) = 4$, $Sc(5) = 6$, $Sc(6) = 6$, $Sc(7) = 10$, $Sc(8) = 10$, $Sc(9) = 10$, $Sc(10) = 10$, $Sc(11) = 12$, $Sc(12) = 12$, $Sc(13) = 16$, $Sc(14) = 16$, $Sc(15) = 16, \cdots$.

文献 [7] 研究了 $Sc(n)$ 的初等性质, 并证明了以下结论: 若 $Sc(n) = x$, 且 $n \neq 3$, 则 $x + 1$ 是大于 n 的最小素数.

在文献 [8] 中引进了伪 Smarandache 对偶函数 $Z^*(n)$, $Z^*(n)$ 定义为满足 $\sum_{k=1}^{m} k$ 整除 n 的最大正整数 m, 即 $Z^*(n) = \max\left\{m : \frac{m(m+1)}{2} \mid n\right\}$. 文献 [9] 研究了 $Z^*(n)$ 的性质, 得到了一些重要的结果. 文献 [3] 中研究了这三个函数之间的关系方程 $Z(n) + Z^*(n) = n$ 与 $Sc(n) = Z^*(n) + n$, 得到了一些重要结果, 并提出了一些还未解决的猜想:

猜想 1 方程 $Z(n) + Z^*(n) = n$ 有有限个偶数解, 也许仅有一个偶数解为 $n = 6$.

收稿日期: 2009-03-12.

基金项目: 国家自然科学基金 (10671155).

作者简介: 杨长恩 (1957-), 副教授, 研究方向: 数论与代数.

猜想 2 方程 $Sc(n)=Z^*(n)+n$ 的解为 p^α, 其中 p 为素数,$2\dagger\alpha$, $p^\alpha+2$ 也为素数.

本文的目的是研究了以上的问题, 得到了下面的:

定理 1 当 n 为偶数时, 方程 $Z(n)+Z^*(n)=n$ 的解只有 $n=6$.

定理 2 方程 $Sc(n)=Z^*(n)+n$ 的解为 p^α, 其中 p 为素数,$2\dagger\alpha$, $p^\alpha+2$ 也为素数, 以及满足条件 $a(2a-1)\dagger n\ (a>1)$, $n+2$ 为素数,n 为正整数.

2 定理的证明

在证明定理之前, 我们先给出下面的

引理 1 若 $Sc(n)=x\in Z$, 且 $n\neq 3$, 则 $x+1$ 为大于 n 的最小素数.

证明 见文献 [7].

由此可见,$Sc(n)$ 除了在 $n=1,\ n=3$ 为奇数外, 在其余情况下的值都是偶数.

引理 2

$$Z^*(p^\alpha)=\begin{cases}2,\ p\neq 3,\\ 1,\ p=3.\end{cases}$$

证明 见文献 [9].

引理 3 若 $n\equiv 0(\bmod a(2a-1))$, 则有 $Z^*(n)\geq 2a>1$.

证明 见文献 [9].

引理 4

$$Z^*(n)\leq\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}.$$

证明 见文献 [9].

引理 5 当 $n=p_0^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}(p_0=2,\ p_i\geq 3,\ k\geq 1,\ \alpha_i\geq 1)$ 为 n 的标准素分解式时, 有

$$Z(n)\leq n-\frac{n}{\min\{p_0^{\alpha_0},p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_k^{\alpha_k}\}}.$$

证明 当 $n=p_0^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ $(p_0=2,\ p_i\geq 3,\ k\geq 1,\ \alpha_i\geq 1)$ 为其标准素分解式时, 分两种情况来证明

(i) 设 $n=2kp^\alpha,\ \alpha\geq 1,\ (2k,\ p^\alpha)=1,\ p\geq 3$ 为素数, 由同余方程 $4kx\equiv 1(\bmod p^\alpha)$ 有解, 可得同余方程 $16k^2x^2\equiv 1(\bmod p^\alpha)$ 有解, 其解不妨设为 y, 则可取 $1\leq y\leq p^\alpha-1$, 又 $p^\alpha-y$ 亦为前面同余方程的解, 则可取 $1\leq y\leq\frac{p^\alpha-1}{2}$. 由 $16k^2y^2\equiv 1(\bmod p^\alpha)$, 则 $p^\alpha\mid(4ky-1)(4ky+1)$, 而 $(4ky-1,4ky+1)=1$, 于是 $p^\alpha\mid 4ky-1$ 或 $p^\alpha\mid 4ky+1$.

若 $p^\alpha\mid 4ky-1$, 则 $n=2kp^\alpha\mid\frac{4ky(4ky-1)}{2}$, 从而

$$Z(n)=m\leq 4ky-1\leq\frac{4k(p^\alpha-1)}{2}-1\leq n-2k-1\leq(1-\frac{1}{p^\alpha})n\leq n-\frac{n}{\min\{p_0^{\alpha_0},p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_k^{\alpha_k}\}}.$$

若 $p^\alpha\mid 4ky+1$, 则 $n=2kp^\alpha\mid\frac{4ky(4ky+1)}{2}$, 从而也有

$$Z(n)=m\leq 4ky\leq\frac{4k(p^\alpha-1)}{2}\leq n-2k=(1-\frac{1}{p^\alpha})n\leq n-\frac{n}{\min\{p_0^{\alpha_0},p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_k^{\alpha_k}\}}.$$

(ii) 设 $n=2^\alpha(2k+1)$, $(\alpha\geq 1,\ k\geq 1)$, 则同余方程 $(2k+1)x\equiv 1(\bmod\ 2^{\alpha+1})$ 与 $(2k+1)x\equiv -1(\bmod\ 2^{\alpha+1})$ 均必有解, 且为奇数, 设 a 为同余方程 $(2k+1)x\equiv 1(\bmod\ 2^{\alpha+1})$ 的解, 若 $1\leq a\leq 2^\alpha-1$, 则取 a 即可, 否则 $2^\alpha+1\leq a\leq 2^{\alpha+1}-1$, 则 $2^{\alpha+1}-a\leq 2^{\alpha+1}-2^\alpha-1=2^\alpha-1$, 且 $2^{\alpha+1}-a$ 满足同余方程 $(2k+1)x\equiv -1(\bmod\ 2^{\alpha+1})$, 故两个同余方程中必有一个满足 $1\leq a\leq 2^\alpha-1$ 的解 a, 则 $2^{\alpha+1}\mid(2k+1)a+1$ 或 $2^{\alpha+1}\mid(2k+1)a-1$, 若 $2^{\alpha+1}\mid(2k+1)a+1$, 则

$$2^{\alpha+1}(2k+1)\mid[(2k+1)a+1](2k+1)a,$$

从而

$$Z(n)\leq a(2k+1)\leq(2^\alpha-1)(2k+1)\leq(1-\frac{1}{2^\alpha})n\leq n-\frac{n}{\min\{p_0^{\alpha_0},p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_k^{\alpha_k}\}}.$$

而当 $2^{\alpha+1}\mid(2k+1)a-1$ 时, 同理也有

$$Z(n)\leq(1-\frac{1}{2^\alpha})n\leq n-\frac{n}{\min\{p_0^{\alpha_0},p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_k^{\alpha_k}\}}.$$

综合 (i),(ii), 我们有, 当 $n=p_0^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ $(p_0=2,\ p_i\geq 3,\ k\geq 1,\ \alpha_i\geq 1)$ 为其标准素分解式时, 则

$$Z(n)\leq n-\frac{n}{\min\{p_0^{\alpha_0},p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_k^{\alpha_k}\}}.$$

下面我们将给出定理的证明.

定理 1 的证明 我们分两种情况来证明.

(1) 当 n 至少有三个不同的素因子时, 即 $n=p_0^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}(p_0=2,\ k\geq 1,\ \alpha_i\geq 1)$ 是其标准素分解式, 为了书写方便, 令 $p_i^{\alpha_i}=\min\left\{p_0^{\alpha_0},p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_k^{\alpha_k}\right\}$, 则

$$\frac{n}{p_i^{2\alpha_i}}+\frac{1}{p_i^{\alpha_i}}=\frac{p_0^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_{i-1}^{\alpha_{i-1}}p_{i+1}^{\alpha_{i+1}}\cdots p_k^{\alpha_k}}{p_i^{\alpha_i}}+\frac{1}{p_i^{\alpha_i}}>2.$$

从而, $\frac{4n^2}{p_i^{2\alpha_i}}+\frac{4n}{p_i^{\alpha_i}}+1>8n+1$, 进而 $\frac{n}{p_i^{\alpha_i}}>\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}$, 于是由引理 4 与引理 5, 有

$$Z(n)+Z^*(n)\leq n-\frac{n}{p_i^{\alpha_i}}+\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}<n.$$

(2) $n=2^\alpha q^\beta$ $(\alpha\geq 1,\ \beta\geq 0,\ q\geq 3$ 为素数). 分两种情况来证明.

(i) 设 $Z^*(n)=2a$, 则 $a(2a+1)\mid 2^\alpha q^\beta$. 若 a 是大于 1 的奇数, 则 a 与 $2a+1$ 均是 q 的正整数次幂, 与 a 与 $2a+1$ 互素矛盾, 从而 a 为偶数, 则 $a|2^\alpha$, 可设 $a=2^\gamma(0\leq\gamma\leq\alpha)$, 又 $(2a+1)\mid q^\beta$, 于是 $(2^{\gamma+1}+1)\mid q^\beta$. 若 n 为方程 $Z(n)+Z^*(n)=n$ 的解, 则 $Z(2^\alpha q^\beta)=2^\alpha q^\beta-2^{\gamma+1}$, 进而 $2^{\alpha+1}q^\beta\mid(2^\alpha q^\beta-2^{\gamma+1})(2^\alpha q^\beta-2^{\gamma+1}+1)$. 则有 $q^\beta\mid 2^{\gamma+1}-1$ 而矛盾. 故此时的 n 不是原方程的解.

(ii) 若 $Z^*(n)=2a-1$, 则 $a(2a-1)\mid 2^\alpha q^\beta$. 由 $(a,2a-1)=1$, 有 $a=2^\gamma(0\leq\gamma\leq\alpha)$, 且 $(2a-1)\mid q^\beta$, 于是 $(2^{\gamma+1}-1)\mid q^\beta$. 若 n 为方程 $Z(n)+Z^*(n)=n$ 的解, 则 $Z(2^\alpha q^\beta)=2^\alpha q^\beta-2^{\gamma+1}+1$, 进而 $2^{\alpha+1}q^\beta\mid(2^\alpha q^\beta-2^{\gamma+1}+1)(2^\alpha q^\beta-2^{\gamma+1}+2)$. 因 $(2^\alpha q^\beta-2^{\gamma+1}+1,\ 2^\alpha q^\beta-$

$2^{\gamma+1}+2)=1$, 则有 $q^\beta \mid 2^{\gamma+1}-1$ 或 $q^\beta \mid 2^{\gamma+1}-2$. 但 $q^\beta \mid 2^{\gamma+1}-2$ 与 $(2^{\gamma+1}-1) \mid q^\beta$ 矛盾, 则 $q^\beta \mid 2^{\gamma+1}-1$. 从而 $q^\beta = 2^{\gamma+1}-1 = 2a-1$, 于是 $Z(2^\alpha q^\beta)=(2^\alpha-1)q^\beta$.

又 $2^{\alpha+1} \mid (2^\alpha q^\beta - 2^{\gamma+1}+2)$, 这时又分两种情况.

若 $\gamma=\alpha$, 有 $2^{\alpha+1} \mid (2^\alpha q^\beta+2)$, 则 $2^\alpha \mid 2$, 有 $\alpha=1$, 从而 $a=2$, $q^\beta=3$, 则 $n=6$. 而 $Z(6)+Z^*(6)=3+3=6$, 即 $n=6$ 为原方程的解.

若 $0 \le \gamma \le \alpha-1$, 则 $a=2^\gamma \le 2^{\alpha-1}, q^\beta = 2a-1 \le 2^\alpha-1$, 从而 $Z(2^\alpha q^\beta) \le 2^\alpha(q^\beta-1), Z^*(2^\alpha q^\beta)=q^\beta$, 则

$$Z(2^\alpha q^\beta)+Z^*(2^\alpha q^\beta) \le 2^\alpha(q^\beta-1)+q^\beta \le 2^\alpha(q^\beta-1)+2^\alpha-1=n-1,$$

故此时的 n 不是原方程的解.

定理 2 的证明 我们分五种情况来证明.

(1) $n=1$ 时, $Z^*(1)=1$, $Sc(1)=1$, 则 1 不为其解.

(2) $n=3^\alpha$ $(\alpha \ge 1)$, 由引理 2 ,$Z^*(3^\alpha)=2$, 若 $n=3^\alpha$ 是原方程的解, 则 $Sc(3^\alpha)=2+3^\alpha$, 因为 $3 \mid 3^\alpha+2+1$, 从而 $3^\alpha+2+1$ 不可能为素数而与引理 1 相矛盾, 故 $n=3^\alpha$ 不是原方程的解.

(3) $n=p^\alpha$ $(\alpha \ge 1,\ p \ge 5$ 为素数), 由引理 2,$Z^*(p^\alpha)=1$, 若 $n=p^\alpha$ 是原方程的解, 则 $Sc(p^\alpha)=1+p^\alpha$, 因当 $p \ge 5$ 时,$3 \mid p^{2\beta}+2$, 故由引理 1 ,α 不能为偶数, 且当 $p^\alpha+2$ $(2 \dagger \alpha)$ 为素数时,$n=p^\alpha$ $(\alpha \ge 1,\ p \ge 5$ 为素数) 满足原方程.

(4) $n=2^\alpha(\alpha \ge 1)$, 若 $\frac{m(m+1)}{2} \mid 2^\alpha$, 因 $(m,m+1)=1$, 则 $m=1$, 故 $Z^*(2^\alpha)=1$, 若 $n=2^\alpha$ 是原方程的解, 则 $Sc(2^\alpha)=1+2^\alpha$, 因 $2 \mid (2^\alpha+1+1)$, 与引理 1 矛盾, 故 $n=2^\alpha(\alpha \ge 1)$ 不是原方程的解.

(5) $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}(k \ge 2,\ \alpha_i \ge 1)$ 为其标准素分解式. 我们又分为两种情况来证明.

(i) $2 \dagger n$, 则 $2 \dagger p_i^{\alpha_i}$ 时, 从而 $2 \mid Sc(n)$, 若 n 要满足原方程, 则必须 $2 \dagger Z^*(n)$. 现考虑 $Z^*(n)$, 若存在整数 $a(a>1)$, 使 $a(2a-1) \mid n$, 则 $Z^*(n) \ge 2a-1$, 若存在整数 $a(a>1)$, 使 $a(2a+1) \mid n$, 则 $Z^*(n) \ge 2a$, 从而

$$Z^*(n)=\max\{\max\{2k : k(2k+1) \mid n\},\ \max\{2k-1 : k(2k-1) \mid n\}\}.$$

再分三种情况来讨论

第一, 若 $Z^*(n)=2a-1>1$, 则 $a(2a-1) \mid n$, 有 $a \mid n$, $a \mid [n+(2a-1)+1]$. 若 n 要满足原方程, 则 $Sc(n)=2a-1+n$. 而 $Sc(n)+1$ 不为素数, 与引理 1 相矛盾.

第二, 若 $Z^*(n)=2a>1$, 则 $a(2a+1) \mid n$, 有 $a \mid n$, $(2a+1) \mid n$. 若 n 要满足原方程, 则 $Sc(n)=2a+n$. 而 $Sc(n)+1$ 不为素数, 与引理 1 相矛盾.

最后, 若 $Z^*(n)=1$, 由 $a>1$, 则 $a(2a-1) \dagger n$, 从而若 $n+2$ 不是素数, 由引理 1, 这样的 n 不是原方程的解. 若 $n+2$ 为素数, 由引理 1, 这样的 n 为原方程的解. 即 $a(2a-1) \dagger n$, $n+2$ 为素数时的正整数 n 为原方程的解.

(ii) $2 \mid n$, 若 n 满足原方程, 则必须 $Z^*(n)$ 为偶数, 且 $Z^*(n) \ge 2$, 而 $Z^*(n)=m \ge 2, \frac{m(m+1)}{2} \mid n$, 则 $(m+1) \mid n$, 进而 $(m+1) \mid (n+m+1)$, 这样 $Sc(n)=n+m+1$ 不是素数, 与引理 1 矛盾.

(下转第 399 页)

Strong convergence theorems for a family of infinite strict pseudo-contractive mappings

LIU Min

(Department of Mathematics, Yibin University, Yibin 644000, China)

Abstract: In this paper, for finding a common fixed points of a family of infinite k_i-strict pseudo-contractive mappings in Hilbert space. Under suitable conditions, some strong convergence theorems are proved by CQ method. The results presented in this paper extend and improve some recent results.

Keywords: nonexpansive mapping, k_i-strict pseudo-contractive mappings, CQ method

2000MSC: 47H09,47H05

(上接第 390 页)

参 考 文 献

[1] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Perez M L. Florentin Smarandache Definitions, Solved and Unsolved Problems, Conjectures and Theorems in Number Theory and Geometry[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 2000.

[3] Zhang Wenpeng,Li Ling.Two problems related to the Smarandache function[J].Scientia Magna,2008,3(2):1-3.

[4] Zhang Wenpeng. On two problems of the Smarandache function[J]. Journal of Northwest University, 2008,38(2):173-176.

[5] Yang Mingshun. On a problem of the pseudo Smarandache function[J]. Pure and Applied Mathematics, 2008,24(3):449-451.

[6] David Gorski. The pseudo Smarandache function[J]. Smarandache Notions Journal, 2002,13:140-149.

[7] Murthy A. Smarandache reciprocal function and an elementary inequality[J]. Smarandache Notions Journal, 2000,11:312-315.

[8] Jozsef Sandor. On certain arithmetic functions[J]. Smarandache Notions Journal, 2001,12:260-261.

[9] Jozsef Sandor. On a dual of the Pseudo Smarandache fuction [J]. Smarandache Notions Journal, 2002,13:18-23.

Two equations concerning the Smarandache function

YANG Chang-en

(College of Mathematics and Information Science, Xianyang Normal University, Xianyang 712000, China)

Abstract: For the famous pseudo Smarandache function $Z(n)$, the Smarandache reciprocal function $Sc(n)$ and the pseudo Smarandache dual function $Z^*(n)$, two equations involving these three functions are discussed. Some results about the solutions are obtained, by applying the congruence equation theory, as well as the elementary method.

Keywords: the pseudo Smarandache function, the Smarandache reciprocal function, the pseudo Smarandache dual function

2000MSC: 11M06